SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
MÔN THI: TOÁN
Thời gian làm bài: 150 phút
(Đề thi có 01 trang)

Câu 1 (2,0 điểm).

a) Cho biểu thức $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ với $-1\le x\le 1$.

Tính giá trị của biểu thức P khi $x=-\dfrac{1}{2017}$.

b) Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực không âm thoả mãn $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{\sqrt{a}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{b}}{1+b}+\dfrac{\sqrt{c}}{1+c}=\dfrac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$

Câu 2 (2,0 điểm). a) Giải phương trình: $2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$

b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^2+(y+1)^2=xy+x+1\\ 2x^3=x+y+1\end{cases}$

Câu 3 (2,0 điểm).

a) Tìm các cặp số nguyên (x; y) thoả mãn: $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7$.

b) Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương.

Câu 4 (3,0 điểm).

1) Cho tam giác nhọn *ABC* (*AB*<*AC*) nội tiếp đường tròn (*O*,*R*). Các đường cao *AD*, *BE*, *CF* cắt nhau tại *H* (*D* thuộc *BC*, *E* thuộc *CA*, *F* thuộc *AB*). Tia *EF* cắt tia *CB* tại *P*, *AP* cắt đường tròn (*O*,*R*) tại *M* (*M* khác *A*).

a) Chứng minh rằng: *PE.PF = PM.PA* và *AM* vuông góc với *HM*.

b) Cho cạnh *BC* cố định, điểm *A* di chuyển trên cung lớn *BC*. Xác định vị trí của *A* để diện tích ΔBHC đạt giá trị lớn nhất.

2) Cho tam giác *ABC* có góc A nhọn, nội tiếp đường tròn tâm *O*. Một điểm *I* chuyển động trên cung *BC* không chứa điểm *A* (*I* không trùng với *B* và *C*). Đường thẳng vuông góc với *IB* tại *I* cắt đường thẳng *AC* tại *E*, đường thẳng vuông góc với *IC* tại *I* cắt đường thẳng *AB* tại *F*. Chứng minh rằng đường thẳng *EF* luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho $a,\ b,\ c$ là ba số thực dương thoả mãn $a^2+b^2+c^2=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\dfrac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\dfrac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le 3$.

***************_**Hết**_***************

Họ và tên thí sinh:…………………………………………………Số báo danh:……………………..

Chữ kí giám thị 1:………………………………..Chữ kí giám thị 2:………………………………….

SỞ GD&ĐT HẢI DƯƠNG

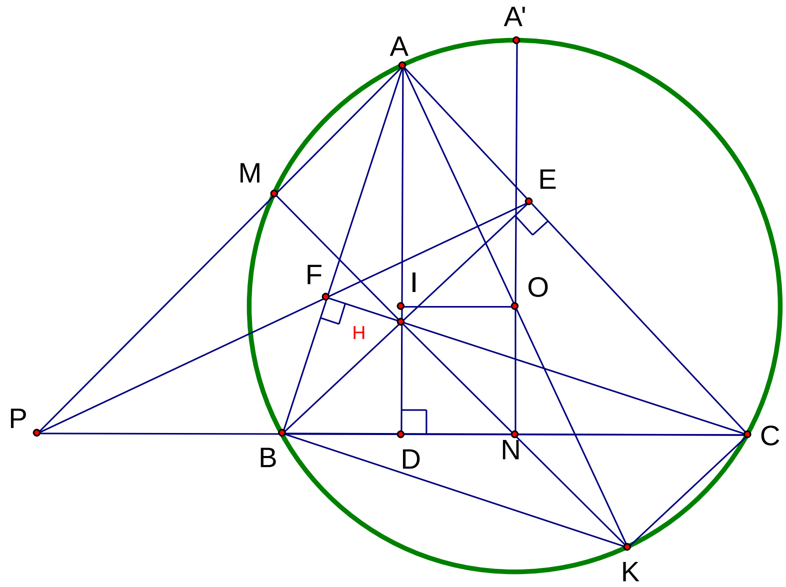
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI TỈNH
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2016-2017
Hướng dẫn chấm gồm: 06 trang

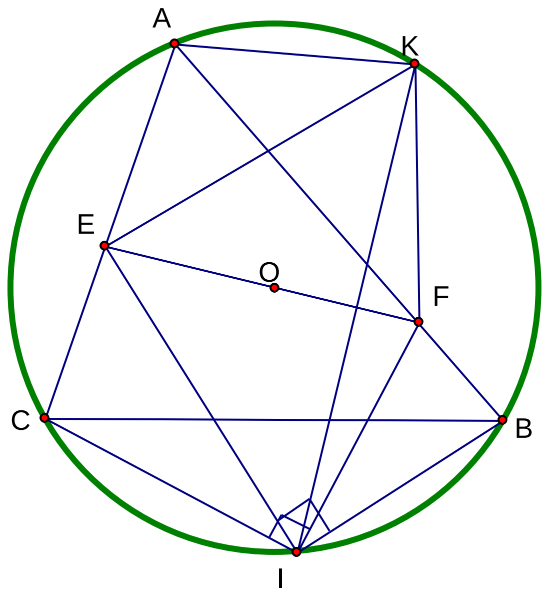
Lưu ý: Điểm toàn bài lấy điểm lẻ đến 0,25; thí sinh làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

Câu	Nội dung	Điểm
1a	*Cho biểu thức* $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}$ *với* $-1\le x\le 1$. *Tính giá trị của biểu thức* P *khi* $x=-\dfrac{1}{2017}$.	1,0
	$P=\sqrt{1-x+\left(1-x\right)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-\left(1-x\right)\sqrt{1-x^2}}$ $=\sqrt{\left(1-x\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)}+\sqrt{\left(1-x\right)\left(1-\sqrt{1-x^2}\right)}$ $=\sqrt{\left(1-x\right)}\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)$ (vì $1-x\ge 0$)	0,25
	Suy ra $P^2=\left(1-x\right)\left(\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}\right)^2$ $=\left(1-x\right)\left(1+\sqrt{1-x^2}+2\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}+1-\sqrt{1-x^2}\right)$ $=\left(1-x\right)\left[2+2\sqrt{1-\left(1-x^2\right)}\right]$ $=2\left(1-x\right)\left(1+\lvert x\rvert\right)$	0,25
	Nếu x<0 suy ra $P^2=2\left(1-x\right)\left(1-x\right)=2\left(1-x\right)^2$ Mà $P=\sqrt{1-x+(1-x)\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{1-x-(1-x)\sqrt{1-x^2}}\ge 0$ $\Rightarrow P=\sqrt{2}\left(1-x\right)$ (Vì $1-x\ge 0$)	0,25
	Vì $x=\dfrac{-1}{2017}<0$ nên giá trị của biểu thức P khi $x=\dfrac{-1}{2017}$ là $P=\sqrt{2}\left(1+\dfrac{1}{2017}\right)=\dfrac{2018}{2017}.\sqrt{2}$	0,25
1b	*Cho* a, b, c *là ba số thực không âm thoả mãn* $a+b+c=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=2$. *Chứng minh rằng:* $\dfrac{\sqrt{a}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{b}}{1+b}+\dfrac{\sqrt{c}}{1+c}=\dfrac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}}$	1,0
	Đặt $\sqrt{a}=x;\sqrt{b}=y;\sqrt{c}=z$ thì $x^2+y^2+z^2=x+y+z=2$ $\Rightarrow 2\left(xy+yz+zx\right)=\left(x+y+z\right)^2-\left(x^2+y^2+z^2\right)=2^2-2=2$	0,25
	$\Rightarrow xy+yz+zx=1$ $\Rightarrow 1+a=xy+yz+zx+x^2=\left(x+y\right)\left(x+z\right)$	0,25
	Tương tự ta có: $1+b=\left(y+z\right)\left(y+x\right);1+c=\left(z+x\right)\left(z+y\right)$ $\Rightarrow\dfrac{\sqrt{a}}{1+a}+\dfrac{\sqrt{b}}{1+b}+\dfrac{\sqrt{c}}{1+c}=\dfrac{x}{(x+y)(x+z)}+\dfrac{y}{(y+z)(y+x)}+\dfrac{z}{(z+x)(z+y)}$	0,25

	$= \dfrac{x(y+z)+y(z+x)+z(x+y)}{(x+y)(y+z)(z+x)}$ $= \dfrac{2(xy+yz+zx)}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \dfrac{2.1}{\sqrt{(1+a)(1+b)(1+c)}} = VP$	**0,25**
2a	*Giải phương trình:* $2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$	**1,0**
	$2x^2-2x+1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right)$ $\Leftrightarrow \left(x^2-x+2\right)+x^2-x-1=(2x+1)\left(\sqrt{x^2-x+2}-1\right) \quad (1)$ Đặt $t=\sqrt{x^2-x+2}-1 \Rightarrow x^2-x+2=(t+1)^2$ Thay vào pt(1) ta có pt: $(t+1)^2+x^2-x-1=(2x+1)t$	**0,25**
	$\Leftrightarrow t^2+2t+1+x^2-x-1=(2x+1)t \Leftrightarrow t^2+2t+x^2-x-2xt-t=0$ $\Leftrightarrow (t-x)^2+t-x=0 \Leftrightarrow (t-x)(t-x+1)=0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=x \\ t=x-1 \end{array}\right.$	**0,25**
	Với $t=x$ ta có pt: $\sqrt{x^2-x+2}-1=x \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2-x+2=(x+1)^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x^2-x+2=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{3}$	**0,25**
	Với $t=x-1$ ta có pt: $\sqrt{x^2-x+2}-1=x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2-x+2=x^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$ Vậy phương trình (1) có 2 nghiệm $x=2,\ x=\dfrac{1}{3}$.	**0,25**
2b	*Giải hệ phương trình:* $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=xy+x+1 \\ 2x^3=x+y+1 \end{cases} \quad (1)$	**1,0**
	$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+(y+1)^2-x(y+1)=1 \\ 2x^3=x+y+1 \end{cases}$	**0,25**
	Đặt y + 1 = t hệ trên trở thành $\begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ 2x^3=x+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ 2x^3=(x+t)\left(x^2+t^2-xt\right) \end{cases}$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ 2x^3=x^3-t^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+t^2-xt=1 \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ x=t \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=t=1 \\ x=t=-1 \end{array}\right.$	**0,25**
	Với x=t=1 thì (x;y)=(1; 0) Với x=t=-1 thì (x;y)=(-1;-2) Vậy nghiệm của hệ phương trình: (x; y) là (1; 0),(-1; -2).	**0,25**

	Tìm các cặp số nguyên $(x;y)$ *thoả mãn:* $2x^2+2y^2+3x-6y=5xy-7$. **(1)**	**1,0**
	Ta có (1) $\Leftrightarrow 2x^2+2y^2+3x-6y-5xy=-7$ $\Leftrightarrow 2x^2-4xy+2y^2-xy+3x-6y=-7$ $\Leftrightarrow 2x(x-2y)+y(2y-x)+3(x-2y)=-7$ $\Leftrightarrow (x-2y)(2x-y+3)=-7$	**0,25**
	Vì $x,\ y\in\mathbb{Z}$ suy ra $(x-2y);\ (2x-y+3)\in Z$ Ta có -7=(-1).7=1.(-7) nên ta có các trường hợp sau:	**0,25**
3a	**+ TH1:** $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 2x-y+3=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$ (Thoả mãn) **+ TH2:** $\begin{cases} x-2y=7 \\ 2x-y+3=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=-6 \end{cases}$ (Thoả mãn)	**0,25**
	+ TH3: $\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x-y+3=-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7 \\ y=-4 \end{cases}$ (Thoả mãn) **+ TH4:** $\begin{cases} x-2y=-7 \\ 2x-y+3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$ (Thoả mãn) Vậy các cặp số nguyên $(x\,;y)$ cần tìm là: $(3\,;2),\ (-5\,;-6),\ (-7\,;-4),\ (1\,;4)$.	**0,25**
	Tìm tất cả các số tự nhiên n *sao cho* $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ *là số chính phương.*	**1,0**
3b	Ta có $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9$ là số chính phương *Mà* $n^2+2n+9\in N, \forall n\in N$ suy ra $\sqrt{n^2+2n+18}$ là số tự nhiên Đặt $\sqrt{n^2+2n+18}=k\ (k\in N)$ $\Rightarrow\ n^2+2n+18=k^2$ $\Leftrightarrow\ n^2+2n+1+17=k^2 \Leftrightarrow (n+1)^2+17=k^2$	**0,25**
	$\Leftrightarrow\ k^2-(n+1)^2=17$ $\Leftrightarrow (k+n+1)(k-n-1)=17$	**0,25**
	Vì k, n đều là số tự nhiên nên k+n+ 1 > k - n-1, đồng thời k > n nên: $(k+n+1)(k-n-1)=17.1$	**0,25**
	$\Leftrightarrow \begin{cases} k+n+1=17 \\ k-n-1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k+n=16 \\ k-n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=9 \\ n=7 \end{cases}$ Từ đó ta có $n^2+2n+\sqrt{n^2+2n+18}+9=81=9^2$ (Thoả mãn). Vậy n=7	**0,25**
	Cho tam giác nhọn ABC (AB<AC) nội tiếp đường tròn (O,R). Các đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H (D thuộc BC, E thuộc CA, F thuộc AB). Tia EF cắt tia CB tại P, AP cắt đường tròn (O,R) tại M (M khác A). *a) Chứng minh rằng: PE.PF = PM.PA và AM vuông góc với HM.*	**1,25**

4(1a)		
	Do BE, CF là đường cao của tam giác ABC suy ra $BFC = BEC = 90^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác BFEC nội tiếp $\Rightarrow PBF = PEC$	**0,25**
	Từ đó có: Hai tam giác ΔPBF và ΔPEC đồng dạng (g-g) $\Rightarrow \frac{PB}{PE} = \frac{PF}{PC} \Rightarrow PE.PF = PB.PC$ (1)	**0,25**
	Tứ giác AMBC nội tiếp $\Rightarrow PBM = PAC$. Từ đó có: Hai tam giác ΔPBM và ΔPAC đồng dạng (g-g) $\Rightarrow \frac{PB}{PA} = \frac{PM}{PC} \Rightarrow PB.PC = PM.PA$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $PE.PF = PM.PA$ (đpcm).	**0,25**
	Ta có $PE.PF = PM.PA$ (CM phần a) $\Rightarrow \frac{PE}{PM} = \frac{PA}{PF}$ $\Rightarrow$ Hai tam giác ΔPMF và ΔPEA đồng dạng $\Rightarrow PMF = PEA$ $\Rightarrow$ Tứ giác AMFE nội tiếp (3)	**0,25**
	Do $AEH = AFH = 90^0$ suy ra tứ giác AEHF nội tiếp đường tròn đường kính AH(4). Từ (3) và (4) ta có 5 điểm A, M, F, H, E cùng thuộc đường tròn đường kính AH. $\Rightarrow AMH = 90^0$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AM \perp HM$ (đpcm).	**0,25**
4(1b)	*b) Cho cạnh BC cố định, điểm A di chuyển trên cung lớn BC. Xác định vị trí của A để diện tích ΔBHC đạt giá trị lớn nhất.*	**1,0**
	Kẻ đường kính AK của đường tròn (O; R). Gọi N là trung điểm của cạnh BC. Chứng minh tứ giác BHCK là hình bình hành. Mà điểm N là trung điểm của BC nên N cũng là trung điểm của HK => ON là đường trung bình của tam giác KAH => AH = 2.ON	**0,25**
	Kẻ OI vuông góc với AD (I thuộc AD) suy ra tứ giác OIDN là hình chữ nhật $\Rightarrow$ OI=DN, ON=DI Áp dụng định lý pytago vào tam giác AIO vuông tại I ta có: $AI^2 = AO^2 - OI^2 = R^2 - DN^2 \Rightarrow AI = \sqrt{R^2 - DN^2}$ $\Rightarrow$ AD=AI+ID=$\sqrt{R^2 - DN^2}$ +ON	**0,25**
	Do đó $S_{BHC} = \frac{1}{2}BC.HD = \frac{1}{2}BC(AD - AH) = \frac{1}{2}BC\left(\sqrt{R^2 - DN^2} + ON - 2.ON\right) = \frac{1}{2}BC\left(\sqrt{R^2 - DN^2} - ON\right)$	**0,25**
	Do BC, R, ON không đổi suy ra S_{BHC} đạt giá trị lớn nhất khi DN đạt giá trị nhỏ nhất Mà AB<AC suy ra điểm A chuyển động trên cung nhỏ A'B (A' là điểm chính giữa cung lớn BC) và A không trùng với A' Suy ra điểm D chuyển động trên đoạn NB và D không trùng với N do đó không tìm được giá trị nhỏ nhất của DN Hay không tìm được vị trí điểm A để diện tích tam giác BHC đạt giá trị lớn nhất.	**0,25**

4(2)	*Cho tam giác ABC nhọn, nội tiếp đường tròn tâm O, một điểm I chuyển động trên cung BC không chứa điểm A (I không trùng với B và C). Đường thẳng vuông góc với IB tại I cắt đường thẳng AC tại E, đường thẳng vuông góc với IC tại I cắt đường thẳng AB tại F. Chứng minh rằng đường thẳng EF luôn đi qua một điểm cố định.*	**0,75**
		
	Gọi K là điểm đối xứng của I qua EF. Xét trường hợp điểm K trùng với điểm A Khi đó KI là dây cung của (O) Mà EF là đường trung trực của KI suy ra EF đi qua O	**0,25**
	Xét trường hợp điểm K không trùng với A. Ta có $CIF + BIE = 90^0.2 = 180^0$ $\Rightarrow EIF + BIC = 180^0$ Do tứ giác ABIC nội tiếp suy ra $BAC + BIC = 180^0$ Từ đó ta có $BAC = EIF \Rightarrow EIF = EAF$ $EKF = EIF$ (Do I và K đối xứng qua EF) $\Rightarrow EKF = EAF$ suy ra bốn điểm A, K, E, F cùng thuộc một đường tròn. Khi đó ta thu được hoặc có tứ giác AKFE nội tiếp hoặc có AKEF nội tiếp	**0,25**
	Không mất tính tổng quát giả sử AKFE nội tiếp $\Rightarrow KAF = KEF$ (cùng chắn KF) $\Rightarrow KAB = KEF$ (1) $IEF = KEF$ (Do K và I đối xứng qua EF) (2) $IEF = BIK$ (cùng phụ KIE) (3) Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow KAB = BIK$ $\Rightarrow$ AKBI là tứ giác nội tiếp suy ra K nằm trên đường tròn (O) Suy ra KI là dây cung của (O) Mà EF là đường trung trực của KI $\Rightarrow$ E, O, F thẳng hàng Vậy đường thẳng EF luôn đi qua điểm O cố định.	**0,25**

5	*Cho* a, b, c *là ba số thực dương thoả mãn* $a^2+b^2+c^2=3$. *CMR:* $\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}+\frac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}+\frac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le 3.(1)$	**1,0**
	Đặt vế trái của (1) là *M*. Ta có: $6a^2+8ab+11b^2=(2a+3b)^2+2(a-b)^2\ge(2a+3b)^2$, dấu "=" có khi a=b Suy ra : $\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}\ge 2a+3b>0$ mà $a^2+3ab+b^2>0\ \forall a,b>0$ $\Rightarrow \frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}\le\frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}$.	**0,25**
	Ta chứng minh: $\frac{a^2+3ab+b^2}{2a+3b}\le\frac{3a+2b}{5}$ Thật vậy : (*) $\Leftrightarrow 5\left(a^2+3ab+b^2\right)\le(2a+3b)(3a+2b)\Leftrightarrow(a-b)^2\ge 0$ (luôn đúng) ; Dấu "=" có khi a=b. Do đó : $\frac{a^2+3ab+b^2}{\sqrt{6a^2+8ab+11b^2}}\le\frac{3a+2b}{5}$	**0,25**
	Tương tự: $\frac{b^2+3bc+c^2}{\sqrt{6b^2+8bc+11c^2}}\le\frac{3b+2c}{5}$; $\frac{c^2+3ca+a^2}{\sqrt{6c^2+8ca+11a^2}}\le\frac{3c+2a}{5}$ Cộng vế với vế của ba BĐT cùng chiều trên ta được: $M\le\frac{3a+2b}{5}+\frac{3b+2c}{5}+\frac{3c+2a}{5}=a+b+c$	**0,25**
	Ta có: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+(2ab+2bc+2ca)\le a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)$ $=3a^2+3b^2+3c^2=9$. Do đó: $a+b+c\le 3$. Vậy $M\le 3$, dấu đẳng thức có khi a = b = c = 1.	**0,25**